

Correction Feuille Exercice 24

Montrer qu'on a une fonction de répartition

Exercice 20

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions de répartition d'une variable aléatoire à densité. Le cas échéant, déterminer une densité associée.

$$F_1(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad F_2(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. La fonction $x \rightarrow e^x$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0[$ et la fonction $x \rightarrow 1$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

Donc la fonction F_1 est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0.

De plus $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_1(x) = 1$. Donc la fonction F_1 est continue en 0 et par conséquent

La fonction F_1 est continue sur \mathbb{R} .

2. La fonction F_1 est croissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. De plus la fonction F_1 est continue en 0 (donc elle se raccorde en 0).

La fonction F_1 est croissante sur \mathbb{R} .

3. Enfin, on calcule les limites de F_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x) = 1.$$

La fonction F_1 est bien une Fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Une densité est obtenue en dérivant F_1 aux endroits où elle est dérivable.

$$f_1(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. La fonction $x \rightarrow \frac{x-1}{x+1}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ et la fonction $x \rightarrow 0$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty; 1[$.

Donc la fonction F_2 est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 1.

De plus $\lim_{x \rightarrow 1^-} F_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x+1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} F_2(x) = 0$. Donc la fonction F_2 est continue en 1 et par conséquent

La fonction F_2 est continue sur \mathbb{R} .

2. La fonction F_2 est croissante sur $] -\infty; 1[$. Sur $]1, +\infty[$, $F_2'(x) = \frac{x+1 - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$.

La fonction F_2 est donc croissante sur $]1, +\infty[$. De plus la fonction F_2 est continue en 1 (donc elle se raccorde en 1).

La fonction F_2 est croissante sur \mathbb{R} .

3. Enfin, on calcule les limites de F_2 en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_2(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1.$$

La fonction F_2 est bien une Fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Une densité est obtenue en dérivant F_2 aux endroits où elle est dérivable.

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer qu'on a une densité de probabilité

Exercice 21

Montrer que la fonction f suivante est une densité de probabilité. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pour tout $x \in [0, 2]$, $\frac{3}{8}x^2 \geq 0$. La fonction f est donc positive sur \mathbb{R} .
2. La fonction $x \rightarrow \frac{3}{8}x^2$ est continue sur $[0, 2]$ et $x \rightarrow 0$ est continue sur $] -\infty, 0[$, et sur $]2, +\infty[$. La fonction f est donc continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et en 2.
3. Les intégrales $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ et $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ sont trivialement convergentes et valent 0. La fonction f est continue sur $[0, 2]$. On peut donc calculer son intégrale.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 \frac{3}{8}x^2 dx \\ &= \left[\frac{3}{8} \times \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{2^3}{8} - 0 \end{aligned}$$

C'est à dire que

$$\int_0^2 f(x)dx = 1$$

La fonction f est une densité de probabilité.

Exercice 22

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+|x|} \geq 0$. La fonction f est donc positive sur \mathbb{R} .
2. La fonction $x \rightarrow \frac{1}{1+|x|}$ est continue sur \mathbb{R} .
3. Soit $X > 0$, on calcule $\int_0^X \frac{1}{1+|x|} dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{1}{1+|x|} dx &= [\ln(1+|x|)]_0^X \\ &= \ln(1+X) - 0 \end{aligned}$$

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X f(x)dx = +\infty$

La fonction f n'est pas une densité de probabilité.

Exercice 23

La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1; 0] \\ 1-x & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est-elle une densité de probabilité ?

1. Pour tout $x \in [-1; 0]$, $1+x \geq 0$. Pour tout $x \in]0; 1]$, $1-x \geq 0$. La fonction f est donc positive sur \mathbb{R} .
2. La fonction $x \rightarrow 1+x$ est continue sur $[-1; 0]$. La fonction $x \rightarrow 1-x$ est continue sur $]0; 1]$. La fonction $x \rightarrow 0$ est continue sur $] -\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$.

La fonction f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en -1 , 0 et 1 .

3. On a de façon triviale, $\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx = 0$ et $\int_1^{+\infty} f(x) dx = 0$. La fonction $x \rightarrow 1+x$ est continue sur $[-1; 0]$ et la fonction $x \rightarrow 1-x$ est continue sur $[0; 1]$. Leurs intégrales existent et donc

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 1+x dx = \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = 0 - (-1 + 1/2) = 1/2,$$

d'une part et d'autre part

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 1-x dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 - 1/2 - 0 = 1/2$$

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

La fonction f est une densité de probabilité.

Calculer, si elle existe une espérance

Exercice 24

La fonction $x \rightarrow \frac{3}{8}x^3$ est continue sur $[0; 2]$ donc l'intégrale $\int_0^2 \frac{3}{8}x^3 dx$ est absolument convergente. Par extension, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ est absolument convergente. La variable aléatoire X admet donc une espérance et

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \\ &= \int_0^2 \frac{3}{8}x^3 dx \\ &= \left[\frac{3}{8 \times 4}x^4 \right]_0^2 \end{aligned}$$

On a donc

$$E(X) = \frac{3}{2}.$$

Exercice 25

L'intégrale $\int_{-\infty}^1 xf(x)dx$ est absolument convergente et vaut 0. On étudie maintenant

$$\int_1^{+\infty} \left| x \times \frac{\ln(x)}{x^2} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$$

La fonction $x \rightarrow \frac{\ln(x)}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Soit $y > 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^y \frac{\ln(x)}{x} &= \left[\frac{\ln(x)^2}{2} \right]_1^y \\ &= \frac{\ln(y)^2}{2} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

L'intégrale impropre n'est pas convergente.

La variable aléatoire à densité X n'admet donc pas d'espérance.

Exercice 26

On étudie

$$\int_{-\infty}^0 |xf(x)|dx = -\int_{-\infty}^0 xf(x)dx = -\int_{-\infty}^0 xe^{2x}dx$$

La fonction $x \rightarrow xe^{2x}$ est continue sur $] -\infty; 0]$. Soit $y < 0$, par une intégration par partie, on calcule

$$\begin{aligned} \int_y^0 xe^{2x} dx &= \left[\frac{x}{2} e^{2x} \right]_y^0 - \int_y^0 \frac{e^{2x}}{2} dx \\ &= -\frac{y}{2} e^{2y} - \frac{1}{4} [e^{2x}]_y^0 \\ &= -\frac{y}{2} e^{2y} - \frac{1}{4} + \frac{e^{2y}}{4} \end{aligned}$$

Or $\lim_{y \rightarrow -\infty} -ye^{2y} = 0$ par croissance comparée. L'intégrale $\int_{-\infty}^0 xf(x)dx$ est absolument convergente et

$$\int_{-\infty}^0 xf(x)dx = -\frac{1}{4}$$

On étudie maintenant

$$\int_0^{+\infty} |x \times f(x)| dx = \int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx$$

La fonction $x \rightarrow xf(x)$ étant impaire, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx = -\int_{-\infty}^0 xf(x)dx = \frac{1}{4}$$

La variable aléatoire à densité X admet donc une espérance et $E(X) = 0$.

✍ Déterminer la loi d'une transformée affine

Exercice 27 (Transformation affine - A connaitre)

Soit $y \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(a + (b - a)X \leq y) \\ &= P\left(X \leq \frac{y - a}{b - a}\right) \end{aligned}$$

On pose $x = \frac{y - a}{b - a}$. Il y a alors 3 cas :

— Si $y < a$ alors $x < 0$ et $P(X \leq x) = 0$ donc

$$F_Y(y) = 0$$

— Si $y \in [a, b]$ alors $x \in [0, 1]$ et donc

$$F_Y(y) = F_X(x) = \frac{y - a}{b - a}$$

— Si $y > b$ alors $x > 1$ et $P(X \leq x) = 1$ donc

$$F_Y(y) = 1$$

Exercice 28 (Transformation affine)

Soit $y \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P\left(\frac{1}{\lambda}X \leq y\right) \\ &= P(X \leq \lambda y) \\ &= F_X(\lambda y) \end{aligned}$$

Or

$$F_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On sait que $\lambda y \geq 0 \iff y \geq 0$. Ainsi,

$$F_Y(y) = \begin{cases} e^{-\lambda y} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi Y suit une loi exponentielle de paramètre λ . $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 29

Soit $y \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(-X \leq y) \\ &= P(X \geq -y) \\ &= 1 - F_X(-y) \end{aligned}$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire Y est continue (car F_X est continue sur \mathbb{R}). C'est donc une variable aléatoire à densité dont on peut déterminer une densité par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X(-y) = f_X(-y)$$

Ainsi une densité est

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-y)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

La variable aléatoire Y suit une loi normale centrée réduite.

Exercice 30 (Loi uniforme et binomiale)

Soient X_0, \dots, X_n des variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendantes.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\begin{aligned} F_{U_k}(x) &= P(U_k \leq x) \\ &= P(\min(X_0, \dots, X_k) \leq x) \\ &= P((X_0 \leq x) \cap \dots \cap (X_k \leq x)) \\ &= \prod_{j=0}^k P(X_j \leq x) \end{aligned}$$

On peut décomposer le problème en 3.

— Si $x \leq 0$. Alors $F_{U_k}(x) = 0$.

— Si $x \in [0, 1]$. Alors

$$\begin{aligned} F_{U_k}(x) &= \prod_{j=0}^k F_{X_j}(x) \\ &= \prod_{j=0}^k x = x^{k+1} \end{aligned}$$

— Si $x > 1$. Alors $F_{U_k}(x) = 1$.

La fonction de répartition de la variable aléatoire U_k est continue sur \mathbb{R} . La VA admet donc la densité suivante

$$f_{u_k}(x) = \begin{cases} (k+1)x^k & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Sachant que $N = k$, la variable aléatoire U est la même que U_k donc

$$P_{N=k}(U \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^{k+1} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

En utilisant la formule des probabilités totales sur le système complet d'évènement $(N = k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U \leq x) &= \sum_{k=0}^n P(N = k) P_{N=k}(U \leq x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n P_{N=k}(U \leq x) \end{aligned}$$

— Si $x \leq 0$, $P(U \leq x) = 0$.

— Si $x \in [0, 1]$, on calcule

$$\begin{aligned} P(U \leq x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^{k+1} \\ &= x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

— Si $x > 1$, $P(U \leq x) = 1$.

On a déterminé la fonction de répartition de la variable aléatoire U . Cette Fonction étant continue (à vérifier!!), la variable aléatoire U est une VA à densité. La densité associé est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_U(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n + nx \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-1} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 31 (Loi uniforme et loi exponentielle)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\begin{aligned} F_T(x) = P(T \leq x) &= P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X) \leq x\right) \\ &= P(\ln(1 - X) \geq -\lambda x) \\ &= P(1 - X \geq e^{-\lambda x}) \\ &= P(1 - e^{-\lambda x} - X \geq 0) \\ &= P(X \leq 1 - e^{-\lambda x}) \\ &= F_X(1 - e^{-\lambda x}) \end{aligned}$$

On résout l'équation

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\lambda x} > 0 &\iff 1 > e^{-\lambda x} \\ &\iff 0 > -\lambda x \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

De plus on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{-\lambda x} \leq 1$. Donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La VA X suit donc une loi exponentielle de paramètre λ .

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)}$$

On écrit un programme scilab simulant une loi exponentielle de paramètre λ

```
function Y = expo(lambda)
    X = rand()
    Y = (-1/ lambda)* log(1 - X)
endfunction
```

Exercice 32 (Loi exponentielle)

Soit $y \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(e^{-X} \leq y) \end{aligned}$$

— **Premier cas** : $y \leq 0$. Dans ce cas, $e^{-X} \leq Y$ est un évènement impossible donc

$$F_Y(y) = 0$$

— **Second cas** : $y > 0$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(e^{-X} \leq y) \\ &= P(-X \leq \ln(y)) \\ &= P(X \geq -\ln(y)) \\ &= 1 - P(X \leq -\ln(y)) \\ &= 1 - F_X(-\ln(y)) \end{aligned}$$

On a alors deux nouveaux cas :

— On considère $-\ln(y) \geq 0 \iff y \in [0, 1]$. Dans ce cas,

$$F_Y(y) = 1 - (1 - e^{-(-\ln(y))}) = y$$

— Enfin, on considère $-\ln(y) < 0 \iff y > 1$. Dans ce cas,

$$F_Y(y) = 1 - 0 = 1$$

On récapitule les résultats :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } y \in [0, 1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La variable aléatoire Y suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

Utiliser la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Exercice 33

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y = e^X$. Soit $y \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(e^X \leq y) \end{aligned}$$

Il y a alors 2 cas :

- Si $y \leq 0$ alors $F_Y(y) = 0$.
- Si $y > 0$, alors

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(e^X \leq y) \\ &= P(X \leq \ln(y)) \\ &= \Phi(\ln(y)) \end{aligned}$$

En conclusion

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \Phi(\ln(y)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour déterminer la densité de Y , on dérive la fonction de répartition trouvée précédemment. Or si $y > 0$,

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{y} \Phi'(\ln(y)) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{\ln(y)^2}{2}}$$

Exercice 34

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y = X^2$.

1. Montrer que la fonction de répartition de Y est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \begin{cases} 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. On cherche la fonction de répartition de Y . Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(X^2 \leq x) \end{aligned}$$

Il y a alors 2 cas :

- Si $x \leq 0$ alors $F_Y(x) = 0$.
- Si $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(\sqrt{X^2} \leq \sqrt{x}) \\ &= P(|X| \leq \sqrt{x}) \\ &= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 \end{aligned}$$

En conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \begin{cases} 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie que la fonction de répartition est continue.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F_Y(x) = 2\Phi(0) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$$

La fonction F_Y est bien continue en 0. Elle est également continue sur $] -\infty, 0[$ (fonction nulle) et sur $]0, +\infty[$ en tant que composée et somme de fonctions continues. Donc

Y est bien une variable aléatoire à densité.

Pour déterminer la densité de Y , on dérive la fonction de répartition trouvée précédemment. Or si $x > 0$,

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} \Phi'(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \times e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}}$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

🍀 Sujets de concours

Exercice 35 (D'après EML)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. A quelle condition sur α a-t-on que f est une densité d'une v.a. X ?
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. On note Y la variable aléatoire égale à la partie entière de X :

$$\forall k \geq 2, P(Y = k) = P(k \leq X < k + 1).$$

Donner la loi de Y .

Exercice 36 (EML 1996)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etudier les variations de f et tracer sa représentation graphique.
2. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f comme densité.

(a) Déterminer la fonction de répartition F de X .

(b) Montrer que X admet une espérance et calculer l'espérance de X .

(c) On pose $Y = |X|$.

Déterminer la fonction de répartition G de Y . Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité g de Y .

Exercice 37 (ECRICOME 2008)

On considère un jeu où le participant lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Pour $1 \leq i \leq 3$, on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de centre O de la $i^{\text{ème}}$ fléchette. Ces trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 de même loi, indépendantes, sont des variables à densité dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le joueur gagne si la distance la plus proche du centre O se trouve à une distance inférieure à $\frac{1}{5}$ de ce centre. Enfin, on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3 .

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F de X_i .
2. Déterminer l'espérance de X_i .
3. Exprimer l'événement $[M > t]$ à l'aide des événements $[X_1 > t], [X_2 > t], [X_3 > t]$ pour tout réel t .
4. Déterminer la fonction de répartition F_M de M et montrer que M est une variable à densité et en donner une densité notée f_M .
5. Quelle est la probabilité de l'événement G = "le joueur gagne la partie" ?